Politechnika Warszawska | Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa | Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

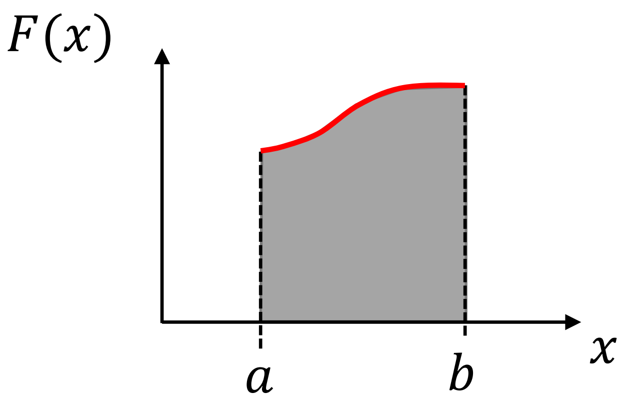
Metoda elementów skończonych (MES1)

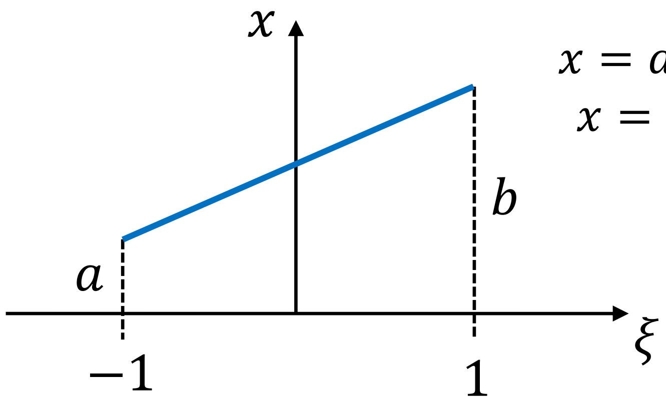
Wykład 5A. Całkowanie numeryczne

03.2022

Całka oznaczona

x – współrzędna kartezjańska $\qquad\qquad$ ξ – *współrzędna naturalna*





$x = a \longrightarrow \xi = -1$

$x = b \longrightarrow \xi = 1$

normalizacja finkcji $F(x)$:

$$x(\xi) = \frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{a+b}{2} \quad ; \quad f(\xi) = F\left(\frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{a+b}{2}\right) \quad ; \quad \boxed{dx = \frac{b-a}{2}\,d\xi}$$

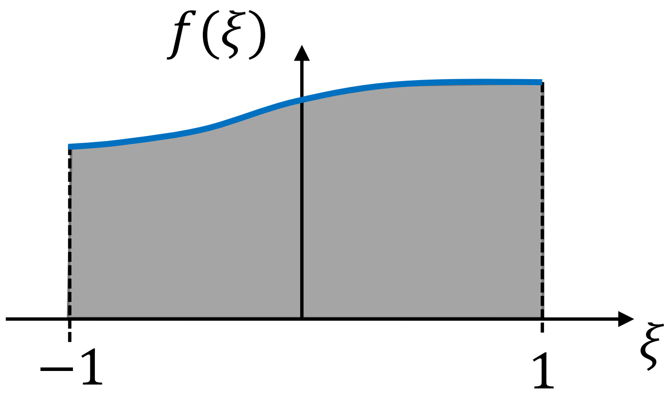
całka oznaczona funkcji $F(x)$:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\xi)\boxed{\frac{b-a}{2}\,d\xi} = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi$$

Reguła kwadratur Gaussa

reguła kwadratur:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(\xi_i) + R_n}$$



n – liczba punktów próbkowania,
ξ_i – współrzędne punktów próbkowania
w_i – współczynniki wagowe
R_n – reszta sumy

$$\boxed{R_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2n} f}{d\xi^{2n}} = 0}$$

Całkowanie numeryczne
daje dokładną wartość całki
dla wielomianów do stopnia $\mathbf{2n-1}$

Reguła kwadratur Gaussa dla funkcji wielomianowych

$R_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2n} f}{d\xi^{2n}} = 0$

dla funkcji liniowej: $f(\xi) = \alpha\,\xi + \beta \quad ; \quad \frac{df}{d\xi} = \alpha \quad ; \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0 \longrightarrow$ $\boxed{2n = 2 \longrightarrow \boldsymbol{n = 1}}$

Wystarczy jeden punkt!

$$\int_{-1}^{1} (\alpha\,\xi + \beta)\, d\xi = w_1 \cdot f(\xi_1) + 0$$

dla jednego pkt. Gaussa: $\xi_1 = 0\,,\, w_1 = 2$ ➡ $\int_{-1}^{1} (\alpha\,\xi + \beta)\, d\xi = w_1 \cdot f(0)$

---

stopnia 2: $f(\xi) = \alpha\,\xi^2 + \beta\,\xi + \gamma\,;\; \frac{df}{d\xi} = 2\alpha\,\xi + \beta \;;\; \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 2\alpha \;;\; \frac{d^3 f}{d\xi^3} = 0 \longrightarrow$

$\boxed{2n = 3 \longrightarrow n = 1.5 \longrightarrow \boldsymbol{n = 2}}$

Potrzeba dwóch punktów!

dla 2 pkt. Gaussa: $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \;;\quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad w_1 = w_2 = 1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (\alpha\xi^2 + \beta\,\xi + \gamma)\, d\xi = w_1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + w_2 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Reguła kwadratur Gaussa dla funkcji wielomianowych

stopnia 3: $f(\xi) = \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta \quad ; \quad \frac{d^4 f}{d\xi^4} = 0 \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{n = 2} \quad \text{(2 punkty)}}$

Wystarczą dwa punkty!

$$\int_{-1}^{1} (\alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta) d\xi = w_1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + w_2 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

---

stopnia 4: $f(\xi) = \alpha\xi^4 + \beta\xi^3 + \gamma\xi^2 + \delta\xi + \varphi \quad ; \quad \frac{d^5 f}{d\xi^5} = 0$

$$\boxed{2n = 5 \longrightarrow n = 2.5 \longrightarrow \boldsymbol{n = 3}}$$

Potrzeba trzech punktów!

dla 3 pkt. Gaussa:

$$\xi_1 = -\sqrt{0.6} \; ; \quad \xi_2 = 0 \; ; \quad \xi_3 = \sqrt{0.6} \; ;$$

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9} \; ; w_2 = \frac{8}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} (\alpha\xi^4 + \beta\xi^3 + \gamma\xi^2 + \delta\xi + \varphi) \, d\xi =$$

$$= \frac{5}{9} \cdot f\left(-\sqrt{0.6}\right) + \frac{8}{9} \cdot f(0) + \frac{5}{9} \cdot f\left(\sqrt{0.6}\right)$$

Reguła kwadratur Gaussa dla funkcji wielomianowych

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(\xi_i) + R_n$$

$$R_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{2n}f}{d\xi^{2n}} = 0$$

Stopień wielomianu	Liczba p. Gaussa	ξ_i	w_i
1	1	0	2
3	2	$-{}^{1}/_{\sqrt{3}}$ $+{}^{1}/_{\sqrt{3}}$	1 1
5	3	$-\sqrt{0.6}$ 0 $+\sqrt{0.6}$	5/9 8/9 5/9
7	4	-0.861136311594953 -0.339981043584856 $+0.339981043584856$ $+0.861136311594953$	0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454

Suma współczynników wagowych wynosi zawsze 2.
Całkowanie numeryczne daje dokładną wartość całki dla wielomianów do stopnia $\mathbf{2n-1}$

Reguła kwadratur Gaussa dla elementów 2D

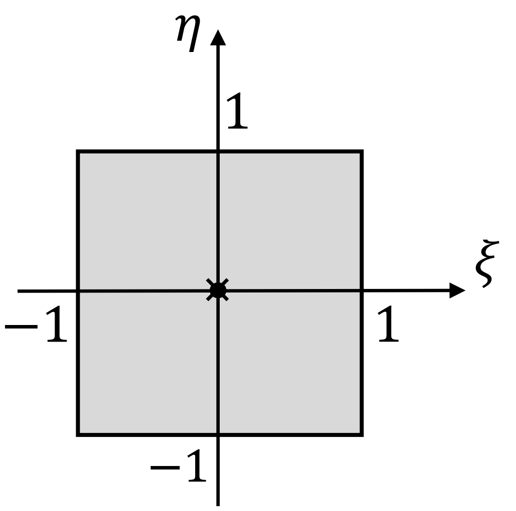
$$\boxed{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta} = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(w_i \cdot f(\xi_i,\eta)\right)\right) d\eta =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n}\left(w_i \cdot f(\xi_i,\eta_j)\right) = \boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w_i w_j \cdot f(\xi_i,\eta_j)\right)}$$

Dla jednego punktu Gaussa mamy:

$\boldsymbol{n = 1}$: $\boxed{\xi_1 = \eta_1 = 0\,, \quad w_1 = 2}$

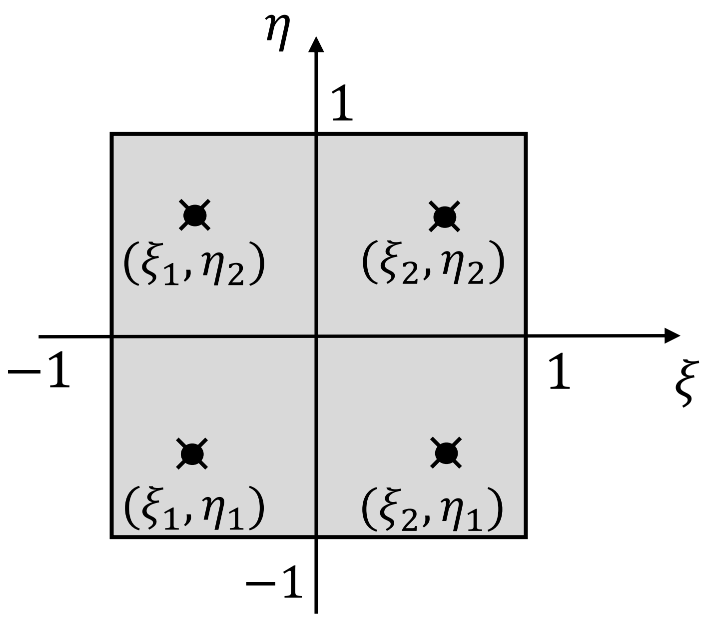
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = w_1 w_1 \cdot f(0,0) = 4f(0,0)$$



Reguła kwadratur Gaussa dla elementów 2D

Dla dwóch punktów Gaussa
na każdym z kierunków mamy:

$$\boldsymbol{n=2}: \quad \boxed{\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ , \quad \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ; \quad w_1 = w_2 = 1}$$



$$\boxed{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta} =$$

$$= w_1 w_1 \cdot f(\xi_1,\eta_1) + w_2 w_1 \cdot f(\xi_2,\eta_1) + w_2 w_2 \cdot f(\xi_2,\eta_2) + w_1 w_2 \cdot f(\xi_1,\eta_2) =$$

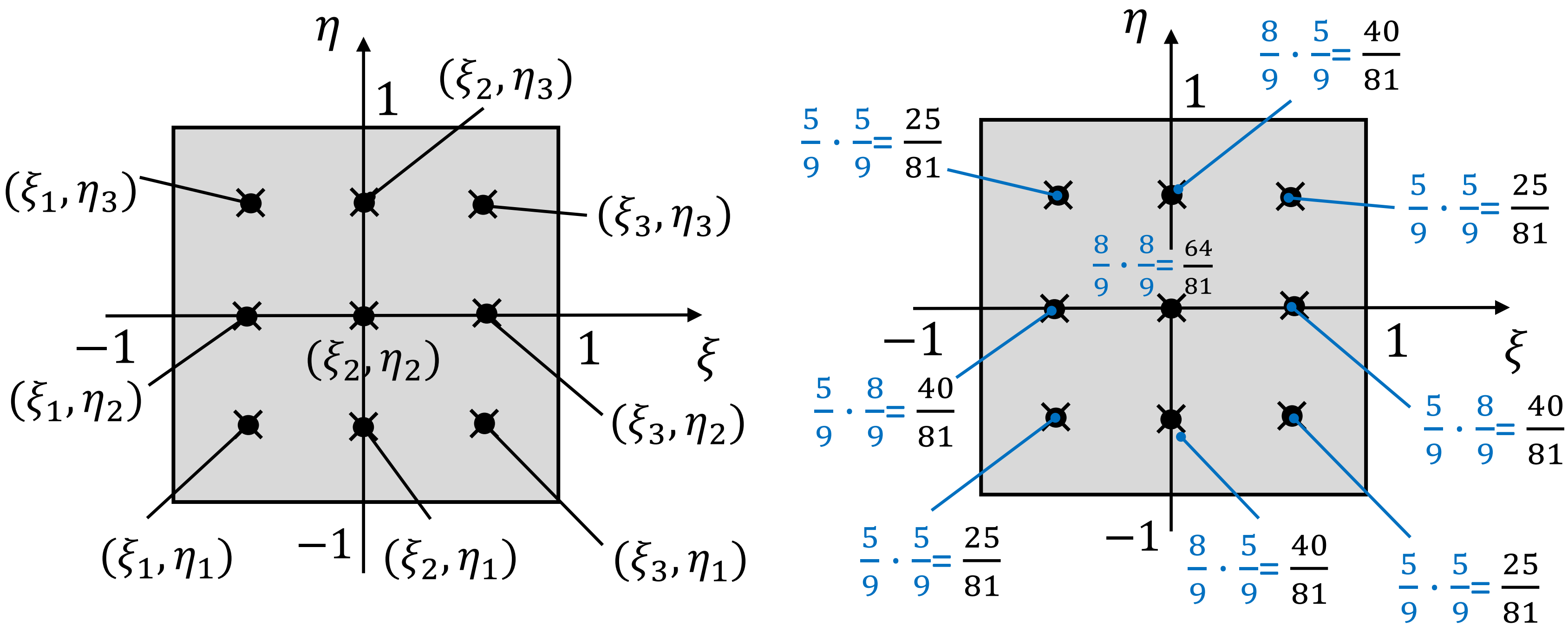
$$\boxed{= f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Reguła kwadratur Gaussa dla elementów 2D

Dla trzech punktów Gaussa
na każdym z kierunków mamy:

$$\boldsymbol{n = 3}: \quad \xi_1 = \eta_1 = -\sqrt{0.6}\,, \quad \xi_2 = \eta_2 = 0\,, \quad \xi_3 = \eta_3 = \sqrt{0.6}$$

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}\ ; \ w_2 = \frac{8}{9}$$



$\boxed{(\xi_i, \eta_j)}$ $\boxed{w_i w_j}$

Reguła kwadratur Gaussa dla elementów 2D

Dla trzech punktów Gaussa
na każdym z kierunków mamy:

$$\boldsymbol{n=3}: \quad \boxed{\begin{gathered}\xi_1 = \eta_1 = -\sqrt{0.6}\,, \quad \xi_2 = \eta_2 = 0\,, \quad \xi_3 = \eta_3 = \sqrt{0.6} \\ w_1 = w_3 = \frac{5}{9}\,; \quad w_2 = \frac{8}{9}\end{gathered}}$$

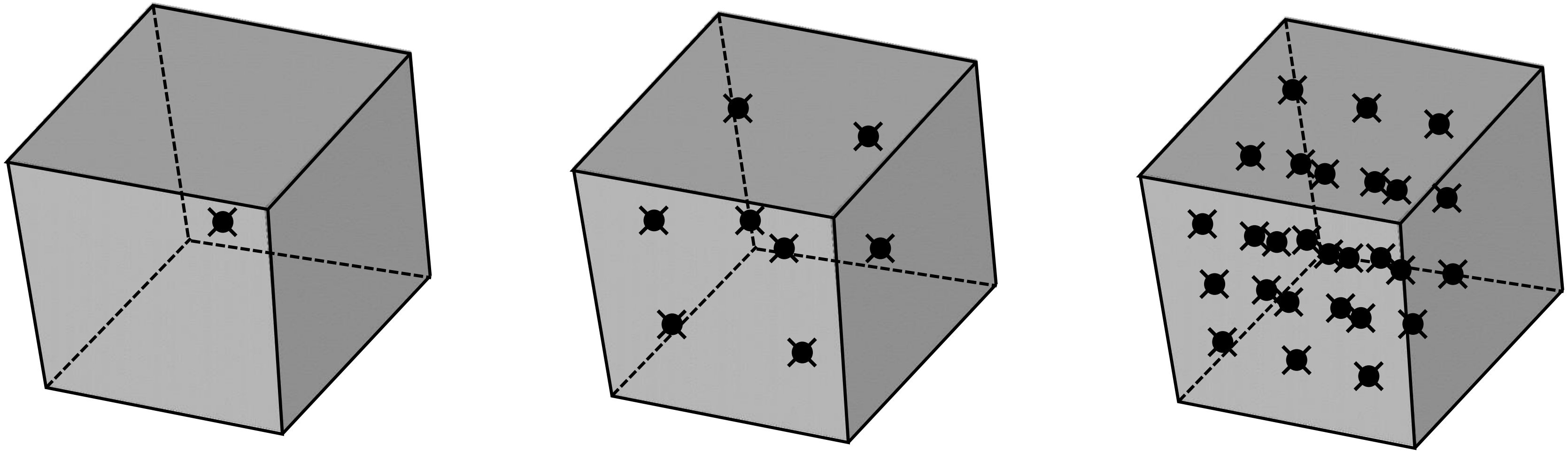
$$\boxed{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta} =$$

$$= w_1 w_1 \cdot f(\xi_1,\eta_1) + w_2 w_1 \cdot f(\xi_2,\eta_1) + w_3 w_1 \cdot f(\xi_3,\eta_1) +$$
$$+ w_1 w_2 \cdot f(\xi_1,\eta_2) + w_2 w_2 \cdot f(\xi_2,\eta_2) + w_3 w_2 \cdot f(\xi_3,\eta_2) +$$
$$+ w_1 w_3 \cdot f(\xi_1,\eta_3) + w_2 w_3 \cdot f(\xi_2,\eta_3) + w_3 w_3 \cdot f(\xi_3,\eta_3) =$$

$$\boxed{\begin{aligned}&= \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}, -\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9} f(0, -\sqrt{0.6}) + \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} f\left(\sqrt{0.6}, -\sqrt{0.6}\right) + \\ &+ \frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9} f(-\sqrt{0.6}, 0) + \frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9} f(0,0) + \frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9} f(\sqrt{0.6}, 0) + \\ &+ \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}, \sqrt{0.6}) + \frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9} f(0, \sqrt{0.6}) + \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} f\left(\sqrt{0.6}, \sqrt{0.6}\right)\end{aligned}}$$

Reguła kwadratur Gaussa dla elementów 3D

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta\,)\,d\xi d\eta d\zeta = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w_i w_j w_k \cdot f(\,\xi_i,\eta_i,\zeta_k)\right)$$



$n = 1$

Dla jednego punktu Gaussa

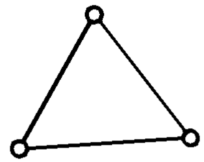
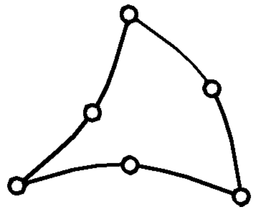
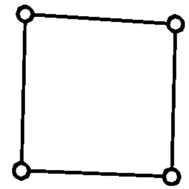
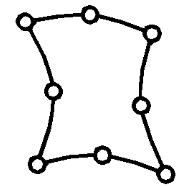
$n = 2\;\;(2\times 2\times 2)$

Dla dwóch punktów Gaussa na każdym z kierunków

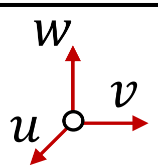
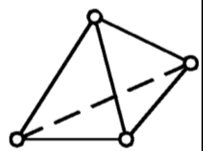
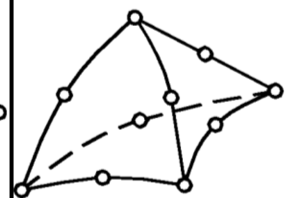
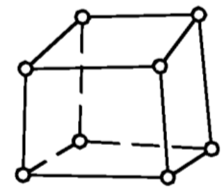
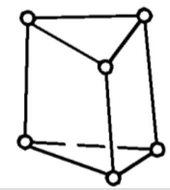
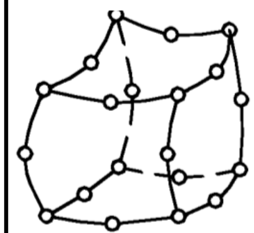
$n = 3\;\;(3\times 3\times 3)$

Dla trzech punktów Gaussa na każdym z kierunków

Schemat całkowania dla elementów 2D

v u 2D	3–node	6–node	4–node	8–node
Typ całkowania				
PEŁNE	3	3	2×2	3×3
ZREDUKOWANE	1	1	1	2×2

Schemat całkowania dla elementów 3D

 3D	4–node	10–node	8–node	6–node	20–node
Typ całkowania					
PEŁNE	4	11	$2 \times 2 \times 2$	3×3	$3 \times 3 \times 3$
ZREDUKOWANE	1	5	1	3×2	$2 \times 2 \times 2$